

Rappel: Series entières

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-x_0)^k, a_k \in \mathbb{R} \quad \forall k \in \mathbb{N}, x_0 \in \mathbb{R}$$

-194-

Proposition Soit $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-x_0)^k$ une série entière de rayon de convergence r .

(1) Supposons que $a_k \neq 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}$

Si $\lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = \ell$ avec $0 \leq \ell \leq +\infty$, alors $r = \frac{1}{\ell}$.

(2) Si $\lim_{k \rightarrow \infty} |a_k|^{\frac{1}{k}} = \ell$ avec $0 \leq \ell \leq +\infty$, alors $r = \frac{1}{\ell}$.

Ex $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{3^k}{(k+1)2^{k+2}} (x-1)^k$ $r = ?$ $D = ?$ $x_0 = 1$

$$a_k = \frac{3^k}{(k+1)2^{k+2}} \Rightarrow r = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right| = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{3^k}{(k+1)2^{k+2}} \frac{(k+2)2^{k+3}}{3^{k+1}} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{2}{3} \frac{k+2}{k+1} = \underline{\underline{\frac{2}{3} = r}}$$

$$\Rightarrow]x_0 - r, x_0 + r[=]\frac{1}{3}, \frac{5}{3}[\subset D$$

$$\text{Si } x = \frac{5}{3} \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} \frac{3^k}{(k+1)2^{k+2}} \left(\frac{2}{3}\right)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cancel{3^k} \cdot \cancel{2^k}}{(k+1)2^{k+2} \cdot \cancel{3^k}} = \frac{1}{4} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k+1} \quad \text{série harmonique, diverge}$$

$$\text{Si } x = \frac{1}{3} \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} \frac{3^k}{(k+1)2^{k+2}} \left(-\frac{2}{3}\right)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{4(k+1)} = \frac{1}{4} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} \quad \text{série harmonique alternée, converge.}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{D = \left[\frac{1}{3}, \frac{5}{3} \right]}}$$

§6.2. Série de Taylor.

Soit $f: \underset{\text{ouvert}}{I} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $C^\infty(I)$ (indéfiniment dérivable), et $x_0 \in I$.

Alors $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k$ est la série de Taylor de f au point x_0 .

Si $x_0 = 0$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$$

est la série de MacLaurin.

2 Questions: (1) Trouver le rayon et le domaine $\overset{D}{}$ de convergence de $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k$.
 (2) Trouver l'ensemble $E \subset D$: $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k$
 (E est l'ensemble où la série de Taylor converge vers $f(x)$)

Rappel: $f(x) = \underbrace{\sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k}_{\text{polynôme de Taylor}} + \underbrace{\frac{f^{(n+1)}(\eta)}{(n+1)!} (x-x_0)^{n+1}}_{R_n(f)}$ η est entre x et x_0

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k \text{ converge vers } f(x) \iff \lim_{n \rightarrow \infty} R_n(f)(x) = 0$$

Ex 1. $e^x \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ converge pour tout $x \in \mathbb{R} \Rightarrow D = E = \mathbb{R}$.

Ex 2. $f(x) = \log x \Rightarrow f \in C^\infty]0, +\infty[$.

$$f'(x) = \frac{1}{x} ; f''(x) = -\frac{1}{x^2} ; f^{(3)}(x) = \frac{2}{x^3} ; f^{(4)}(x) = -\frac{2 \cdot 3}{x^4} \dots f^{(k)}(x) = \frac{(-1)^{k-1} (k-1)!}{x^k}$$

$$\Rightarrow \underline{\text{Taylor}(\log x)_{x=1}} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} (k-1)!}{k!} (x-1)^k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} (x-1)^k$$

$$\text{Si } x-1 = y \Rightarrow x = y+1 \Rightarrow \underline{\text{MacLaurin}(\log(1+y))} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} y^k = y - \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4} + \dots$$

Rayon de convergence: pour $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} (x-1)^k$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right| = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{(-1)^{k+1} (k+1)}{k (-1)^{k+2}} \right| = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k+1}{k} = 1 \Rightarrow r=1 \Rightarrow D =]0, 2[$$

$$\text{Si } x=0 \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} (-1)^k}{k} = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \text{ - série harmonique, diverge}$$

$$\text{Si } x=2 \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} 1^k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \text{ - série harmonique alternée, converge.}$$

$$\Rightarrow D =]0, 2]$$

(2) $E = ?$ $\lim_{n \rightarrow \infty} |R_n(x)| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(-1)^{n+2} \cdot n!}{u^{n+1}} \cdot \frac{(x-1)^{n+1}}{(n+1)!} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} \left| \frac{x-1}{u} \right|^{n+1}$

u est entre 1 et x

-196-
 $0 < x \leq 2$
difficile
Exercice: $\lim = 0 \quad \forall x > \frac{1}{2}$

Si $x = 2 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} \left| \frac{1}{u} \right|^{n+1} = 0 \Rightarrow \log 2 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \dots$

$1 < u < 2$

(on verra plus tard que $E = D =]0, 2]$).

Ex 3. $f(x) = \frac{1}{1-x} \Rightarrow$ Série de MacLaurin, donnée par la série géométrique

$\Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x} \quad ; \quad D = E =]-1, 1[\quad ; \quad \sum_{k=0}^n x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \frac{1}{1-x} \quad |x| < 1$

Ex 4. $f(x) = \sin x$, $f \in C^\infty(\mathbb{R}) \Rightarrow f'(x) = \cos x$, $f''(x) = -\sin x$, $f^{(3)}(x) = -\cos x \dots$

$\Rightarrow f'(0) = 1$, $f''(0) = 0$, $f^{(3)}(0) = -1$, $f^{(4)}(0) = 0, \dots$

MacLaurin $(\sin x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} \quad \forall x \in \mathbb{R}$

le domaine de convergence $D = \mathbb{R}$

-197-

$$(2) E = ? \quad \lim_{h \rightarrow \infty} |R_h(x)| = \lim_{h \rightarrow \infty} \left| \frac{(\sinh(u) \text{ ou } \cos(u))}{(h+1)!} \right| \cdot |x|^{h+1} \leq \lim_{h \rightarrow \infty} \frac{|x|^{h+1}}{(h+1)!} = 0.$$

Série $\sum_{h=0}^{\infty} \frac{|x|^{h+1}}{(h+1)!}$ converge par d'Alembert: $\lim_{h \rightarrow \infty} \frac{|x|^{h+2}}{(h+2)!} \cdot \frac{(h+1)!}{|x|^{h+1}} = \lim_{h \rightarrow \infty} \frac{|x|}{h+2} = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow \lim_{h \rightarrow \infty} \frac{|x|^{h+1}}{(h+1)!} = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow E = D = \mathbb{R}$$

D'une façon similaire
on trouve:

$$\sinh x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}$$

$$\cosh x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k}$$

$\forall x \in \mathbb{R}$

Et aussi:

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

$$\sinh(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)!} x^{2k+1}$$

$$\cosh(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k)!} x^{2k}$$

$\forall x \in \mathbb{R}$

Remarque. Exemple de la série de Taylor (f) qui converge, mais pas vers la fonction $f(x)$.

Soit $f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ indéfiniment dérivable autour de $x=0$.

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-1/x^2} - 0}{x - 0} = \pm \lim_{x \rightarrow 0^\pm} \frac{e^{-1/x^2}}{|x|} \stackrel{\text{red arrow}}{=} \pm \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{e^{-t}}{t^{-1/2}} = \pm \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t^{1/2}}{e^t} \stackrel{BL}{=} \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{2}}{t^{1/2} e^t} = 0$$

$t = \frac{1}{x^2} \Rightarrow |x| = \frac{1}{\sqrt{t}}$

$$\Rightarrow f'(0) = 0.$$

$$f'(x) = e^{-1/x^2} \cdot \frac{2}{x^3} = \frac{2}{x^3} e^{-1/x^2} \Rightarrow f''(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{2}{x^3} e^{-1/x^2} - 0}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2e^{-1/x^2}}{x^4} \stackrel{\text{exercice}}{=} 0$$

$t = \frac{1}{x^2}$

D'une manière similaire on trouve $f^{(k)}(0) = 0 \quad \forall k \geq 1$

$$\Rightarrow \text{Taylor}(f)_{x=0} = 0. \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Alors $\text{Taylor}(f)_{x=0} \neq f(x)$ sauf pour $x=0$.

$$\mathcal{D} = \mathbb{R}, \quad \mathcal{E} = \{0\}.$$

§6.3. Primitive et dérivée d'une fonction définie par une série entière.

Déf. Soit $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. La fonction $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est *une primitive* de f sur $[a, b]$ si $F'(x) = f(x) \quad \forall x \in]a, b[$.

Si $F_1(x)$ et $F_2(x)$ sont deux primitives de $f(x)$ sur $[a, b]$, alors

$$F_1(x) = F_2(x) + \alpha \quad \forall x \in [a, b] \quad \text{où } \alpha \in \mathbb{R}$$

(puisque $F_1'(x) - F_2'(x) = 0$ sur $]a, b[\Rightarrow F_1(x) - F_2(x) = \alpha$).

Ex.

$$\left. \begin{array}{ll} f(x) = \sin x & \Rightarrow F(x) = -\cos x + C \\ f(x) = \cos x & \Rightarrow F(x) = \sin x + C \end{array} \right\} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$f(x) = \frac{1}{x} \quad \Rightarrow \quad F(x) = \log x + C, \quad x > 0$$

$$f(x) = x^k \quad \Rightarrow \quad F(x) = \frac{1}{k+1} x^{k+1} + C, \quad k \neq -1, x > 0$$

$$f(x) = e^x \quad \Rightarrow \quad F(x) = e^x + C$$

Théorème (1) Les deux séries entières $\sum_{k=0}^{\infty} b_k (x-x_0)^k$ et $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{b_k}{k+1} (x-x_0)^{k+1}$ ont le même rayon de convergence r .

(2) Si $r > 0$, alors $f(x) \stackrel{\text{déf}}{=} \sum_{k=0}^{\infty} b_k (x-x_0)^k$ est continue sur $]x_0-r, x_0+r[$

(3) Si $r > 0$, alors $F(x) \stackrel{\text{déf}}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{b_k}{k+1} (x-x_0)^{k+1}$ est la primitive de $f(x)$ sur $]x_0-r, x_0+r[$ telle que $F(x_0) = 0$.

(DZ, Annexe C).

Corollaire. Les deux séries entières $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-x_0)^k$ et $\sum_{k=1}^{\infty} k a_k (x-x_0)^{k-1}$ ont le même rayon de convergence r .

Si $r > 0$, alors $f(x) \stackrel{\text{déf}}{=} \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-x_0)^k$ est continûment dérivable sur $]x_0-r, x_0+r[$ et $f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k (x-x_0)^{k-1}$.

Ex. $\frac{1}{1-z} = \sum_{k=0}^{\infty} z^k \quad \forall z \in]-1, 1[$. Soit $x = 1-z \Rightarrow z = 1-x$

$\Rightarrow \frac{1}{x} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (x-1)^k \quad \forall x \in]0, 2[\Rightarrow$ le rayon de convergence $r = 1$.

-20/-

Considérons $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} (x-1)^{k+1} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} (x-1)^k \stackrel{\text{!}}{=} \text{Taylor}(\log x)_{x=1}$

Par le Thm, la série entière $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} (x-1)^k$ est la primitive de $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (x-1)^k = \frac{1}{x}$,
et les 2 séries ont le même rayon de convergence = 1 sur $]0, 2[$

$F(x) =$ la primitive de $\frac{1}{x} = \log x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} (x-1)^k \quad \forall x \in]0, 2[$
t.g. $F(1)=0$

On a vu déjà que $\text{Taylor}(\log x)_{x=1}$ converge vers $\log 2$ pour $x=2$.

$\Rightarrow$ Donc on a $E = D =]0, 2]$

Finalement:

$$\log x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} (x-1)^k, \quad x \in]0, 2]$$

$$\frac{1}{x} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (x-1)^k, \quad x \in]0, 2[$$

On note que les domaines de convergence de deux séries sont différents dans ce cas, mais les rayons de convergence sont toujours les mêmes.

Ex. Trouver la valeur du paramètre $b \in \mathbb{R}$ telle que la fonction donnée admet un prolongement par continuité en $x=0$.

$$f:]-\frac{\pi}{2}, 0[\cup]0, \frac{\pi}{2}[\quad f(x) = \begin{cases} \frac{\log(1+3x+3x^2)}{2x \cos x} & , x > 0 \\ \frac{\sqrt{1+x^2} - (1-x)}{bx} & , x < 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\log(1+3x+3x^2)}{2x \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(3x+3x^2) + \varepsilon(x)(3x+3x^2)}{2x \cos x} = \frac{3}{2}$$

$\varepsilon \rightarrow 0$

$$\log(1+y) = y - \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} - \dots$$

$y + \varepsilon(x) \cdot y$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{1+x^2} - (1-x)}{bx} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1+x^2 - (1-x)^2}{bx(\sqrt{1+x^2} + (1-x))} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1+x^2 - 1 + 2x - x^2}{bx(\sqrt{1+x^2} + (1-x))} = \frac{2}{2b} = \frac{1}{b}$$

$\frac{0}{0}$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \frac{1}{b} = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow b = \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow \hat{f}(0) = \frac{3}{2} ; \hat{f}(x) = f(x), x \in]-\frac{\pi}{2}, 0[\cup]0, \frac{\pi}{2}[$$

$$\Rightarrow \hat{f} \text{ est continue sur }]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[.$$

